Schriftliche Abiturprüfung 2008
Mathematik GK   Aufgaben mit Lösungen

Aufgabenteil A

Gegeben sind die Funktionen f und g durch die Gleichungen $f(x)=\frac{3x-2x^3}{x^2+1}$ $(x \in D_f)$ und $g(x)=-2x$ $(x \in R)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an.
Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion f.
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten die Nullstellen der Funktion f.
Geben Sie Näherungswerte für die Koordinaten aller lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f sowie deren Art an.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

DB: $x \in R$

Vermutung Punktsymmetrie zu zeigen: $-f(x) = f(-x)$

$$-\frac{3x-2x^3}{x^2+1} = \frac{3(-x)-2(-x)^3}{(-x)^2+1} = \frac{-3x+2x^3}{x^2+1} = -f(x)$$

Nullstellen: $0 = f(x) = 3x_0 - 2x_0^3$

$$0 = x_0(3-2x_0^2) \quad x_{01}=0\ ;\ x_{02}=\sqrt{\frac{3}{2}}\ ;\ x_{03}=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

TP (-0,56/-1,01)   HP (0,56/1,01)   (GTR/GRAPH)

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion $F(x)=\frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right)-x^2$ $(x \in D_F)$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.
Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen im ersten Quadranten eine Fläche vollständig ein.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Flächeninhalt dieser Fläche.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für die reelle Zahl c, für welche die Gerade x = c diese Fläche halbiert.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Zu zeigen: $F'(x) = f(X)$

$$F'(x) = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}.2x-2x = \frac{5x}{x^2+1}-2x \qquad \text{(HN: } x^2+1\text{)}$$

$$= \frac{5x-2x(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{3x-2x^3}{x^2+1} = f(x) \quad \text{w.z.z.w}$$

$$A = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} f(x)dx = 0{,}79FE \qquad 0{,}379 = \left[\frac{5}{2}\ln(x^2+1)-x^2\right]_0^c$$

$$0 = \frac{5}{2}\ln(c^2+1)-c^2-0{,}379 \qquad \underline{c = 0{,}59} \quad \text{(GTR/GRAPH/ROOT)}$$

c) Geben Sie den Schnittpunkt der Graphen der Funktionen f und g an.
Für jedes u $(u \in R, u > 0)$ schneidet die Gerade $x = u$ den Graphen der Funktion f im Punkt P_u und den Graphen der Funktion g im Punkt Q_u.
Es gibt genau einen Wert u, für den die Länge der Strecke $\overline{P_uQ_u}$ maximal wird.
Ermitteln Sie diesen Wert u und geben Sie den maximalen Abstand an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

$f(x) \cap g(x) \quad \rightarrow \quad S(0/0) \qquad d = |P_uQ_u| = f(u) - g(u)$

$$d = \frac{3u - 2u^2}{u^2+1} - (-2u)$$

$u_{Max.} = 1 \qquad d = 2{,}5$ LE (GTR/GRAPH/MAX)

d) Weisen Sie nach, dass die Funktion f' mit $f'(x) = \frac{-2x^4 - 9x^2 + 3}{(x^2+1)^2}$ $(x \in D_{f'})$ die erste Ableitungsfunktion der Funktion f ist.
Untersuchen Sie rechnerisch, wie viele Tangenten an den Graphen der Funktion f parallel zum Graphen der Funktion g verlaufen.
Geben Sie eine Gleichung einer solchen Tangente an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

$$f'(x) = \frac{(3-6x^2)\cdot(x^2+1) - (3x-2x^3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-6x^4 + 3x^2 - 6x^2 + 3 + 4x^4 - 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^4 - 9x^2 + 3}{(x^2+1)^2} \quad \text{w.z.z.w.}$$

$f'(x) = -2 \qquad x_{01} = -1$ und $x_{02} = 1$ <u>Es gibt zwei solcher Tangenten.</u>

t_1: <u>$y = -2x + 2{,}5$</u>

e) Es gibt ganzrationale Funktionen zweiten Grades, die mit dem Graphen der Funktion f die beiden am weitesten voneinander entfernt liegenden Nullstellen gemeinsam haben und deren Graphen achsensymmetrisch zur y-Achse sind.
Ermitteln Sie eine Gleichung einer solchen Funktion.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Lösungsgedanke : Die Nullstellen von f(x) und ein beliebiger Punkt P(0/y) liegt auf dem Graphen der Funktion f(x) ax²+bx+c !

(1) $0 = 1{,}5a + \sqrt{1{,}5} + 1$

(2) $0 = 1{,}5a - \sqrt{1{,}5} + 1$ (GTR/EQUA/SIML/2) $\quad f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 1$

Aufgabe auch durch Überlegung oder mit GTR/STAT lösbar. Es gibt unendlich viele Lösungen!

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0;-3;0)$, $B(3;1;0)$, $C(1;5;0)$ und $D(-3;3;0)$ sowie die Ebene ε mit der Gleichung $z=6$ gegeben.

Das Viereck ABCD ist die Grundfläche eines vierseitigen geraden Prismas ABCDEFGH. Die Deckfläche EFGH dieses Prismas liegt in der Ebene ε. Die Strecke $\overline{AE}$ ist Kante des Prismas.

a) Stellen Sie die Grundfläche des Prismas in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist.

Zeigen Sie mithilfe des Skalarprodukts, dass das Viereck ABCD zwei rechte Innenwinkel besitzt.

Berechnen Sie das Volumen des Prismas.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

Zu zeigen: (1) AD parallel zu BC
(2) Winkel (CB;CD) = 90°

zu (1) $AD = r \cdot BC \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ w.A. für r = 1,5 w.z.z.w.

zu (2) Winkel (CB;CD) = 90° $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2) = 0$

w.z.z.w aus (1) folgt, dass der anliegende auch ein rechter Winkel sein muss. Es existieren also zwei rechte Winkel.

V = A_G h $\qquad$ $A_G = \dfrac{|AD| + |BC|}{2} \cdot h = \dfrac{\sqrt{45} + \sqrt{20}}{2} \cdot \sqrt{20} = 25FE$

h = 6 LE

<u>V = 150 VE</u>

Auf der z-Achse befindet sich im Punkt $L(0;0;10)$ eine punktförmige Lichtquelle.

b) Durch das einfallende Licht entsteht ein Schatten des Prismas in der x-y-Ebene.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes E_S des Punktes E.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

(1) g(L; a): $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ h(EF): $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Richtig!

(2) $g \cap h$: S(6/5/6) (GTR/PROG/UP-LAGE) Richtig!

(3) Der Strahl trifft die Kante EF $\Leftrightarrow 0 \le s \le 1$

$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ s=2 Der Strahl trifft die Kante nicht. Falsch!

Teil C: Stochastik

Eine Brauerei benutzt für ein Gewinnspiel Kronenkorken, die auf der Innenseite mit je genau einem Buchstaben bedruckt sind.

Die Besucher eines Brauereifestes können aus einer Urne derartige Kronenkorken nach verschiedenen Spielregeln ziehen und Preise gewinnen.

Die Urne enthält vor einer Ziehung 100 solcher Kronenkorken, darunter 25 mit dem Buchstaben S, 10 mit dem Buchstaben F, 45 mit dem Buchstaben A und 20 Kronenkorken mit anderen Buchstaben.

a) Aus der Urne werden drei Kronenkorken mit Zurücklegen entnommen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

Ereignis A: Mindestens zwei Kronenkorken tragen den Buchstaben S.

Ereignis B: Es wird keiner der Buchstaben S, F und A gezogen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

A = ($SS;S$S;SS$;SSS)

P(A) = $(0,25)^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot (0,25)^2$ = 0,1563 oder $B^3_{0,25}(2 \le Z \le 3) = 0,1563$

P(B) = $0,2^3$ = 0,008 = 0,8% oder $B^3_{0,2}(Z = 3) = 0,008$

b) Berechnen Sie, wie viele Kronenkorken beim Ziehen mit Zurücklegen aus der Urne mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,90 mindestens ein Buchstabe F gezogen wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

P(mindestens einmal...) = 1 – P(keinmal...) P(F) = 0,9

$1 - 0,9^n = 0,90$

$0,9^n = 0,10$

$n \ln 0,9 = \ln 0,1$

$n = \frac{\ln 0,1}{\ln 0,9}$

$n = 21,85$ Es müssen mindestens 22 Korken gezogen werden.

c) Hauptgewinne werden an die Besucher vergeben, die bei viermaligem Ziehen mit Zurücklegen vier Kronenkorken mit dem Buchstaben H gezogen haben.

Die Wahrscheinlichkeit eines Hauptgewinns beträgt $2,0736 \cdot 10^{-4}$.

Bestimmen Sie die Anzahl der Kronenkorken mit dem Buchstaben H, die in der Urne enthalten sind.

$\frac{x^4}{100^4} = 2,0736 \cdot 10^{-4} \quad | \cdot 10^4 \qquad x^4 = 20.736 \quad | \sqrt[4]{\ } \qquad \underline{x = 12}$

Eine Million Flaschen mit den Gewinnspiel-Kronenkorken, darunter 25 000 mit dem Buchstaben W, sind in Kästen zu je 20 Flaschen an den Einzelhandel ausgeliefert worden.

d) Bestimmen sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bierkasten mindestens einen Kronenkorken mit dem Buchstaben W enthält.

P(W) = 0,025 $B^{20}_{0,025}(1 \le Z \le 20) = 0,397$ = <u>39,7%</u>

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Wahlaufgabe 1

Eine Gemeinde hat in einem ebenen Geländeabschnitt ein Grundstück erworben, um es als Gewerbegebiet zu erschließen.

In die Flurkarte der Gemeinde wird ein x-y-Koordinatensystem so eingetragen, dass die Bundesstraße von B-Dorf nach A-Stadt durch die x-Achse beschrieben wird.

Eine Längeneinheit entspricht 100 m.

Das erworbene Grundstück hat die Form eines Rechtecks mit dem Punkt $C(-1;3)$ als Eckpunkt.

Die Gerade g verläuft durch Punkt C in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und begrenzt das Grundstück. Die Punkte $D(2;-2)$ und $E(-2;-3)$ liegen auf je einer Seite des Rechtecks.

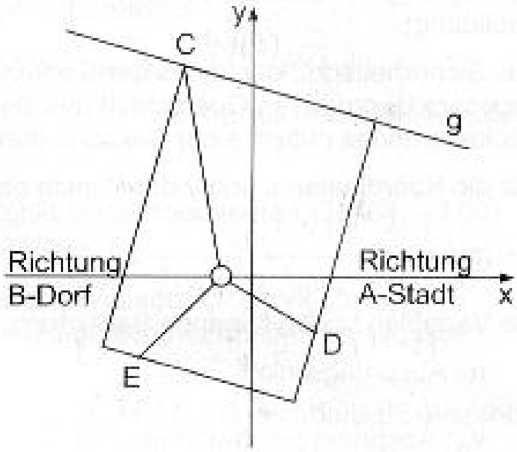


Abbildung (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des erworbenen Grundstücks in Quadratmeter.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Lösungsgedanke: Schnittpunkte zwischen g, h(D) und n(E) ermitteln

(1) g: y = $-\frac{1}{3}x+n$ C(-1/3) einsetzen $y=-\frac{1}{3}x+2\frac{2}{3}$

(2) Lotgerade zu g durch D h: $y=3x-8$

(3) $h \cap g$: S(3,2/1,6)

(4) Parallele zu g durch E n: $y=-\frac{1}{3}x-3\frac{2}{3}$

(5) $h \cap n$: T (1,3/-4,1)

(6) A = $|CS| \cdot |ST| = \sqrt{19{,}6} \cdot \sqrt{36{,}1}$ = 26,6 FE <u>A= 266.000m²</u>

b) Von den Punkten C, D und E sollen Straßen geradlinig zu einem gemeinsamen Punkt auf der Bundesstraße, dem Mittelpunkt eines Kreisverkehrs, führen.

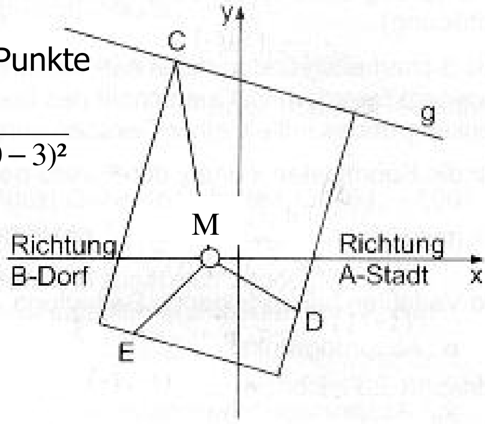
Aus Kostengründen soll die Summe der Längen der drei Straßen minimal werden.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreisverkehrs und die Gesamtlänge der Straßen.

Hinweis: Die Straßenbreiten und der Durchmesser des Kreisverkehrs sind in den Berechnungen zu vernachlässigen.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Mittelpunkt des Kreisverkehrs: M (x/0)
Länge der drei Straßen: d



d = $|EM| + |DM| + |CM|$ Zielfunktion: Abstand zweier Punkte

d = $\sqrt{(x+2)^2 + (0-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (0-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (0-3)^2}$

d = $\sqrt{x^2 + 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 + 2x + 10}$

(GTR/GRAPH/MIN) $x_{min.}$ = -0,25 d = 9,58 LE

d = 958m

c) Nach Fertigstellung der Straßen ergaben die Beobachtungen des Fahrzeugaufkommens, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 63,6 % drei aufeinander folgende Fahrzeuge den Kreisverkehr an der Ausfahrt in Richtung A-Stadt verlassen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Fahrzeug den Kreisverkehr nicht an dieser Ausfahrt in Richtung A-Stadt verlässt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Lösungsgedanke: A...drei aufeinander folgende Autos nutzen Ausfahrt A
p...Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto die Ausfahrt A nutzt

63,6% sind P(A) = 0,636 = p³ ; also $\sqrt[3]{0{,}636} = 0{,}86 = p$

q...Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto nicht A nutzt

q = 1 – p = 1 – 0,86 = 0,14

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,14 nutzt ein Auto nicht A.

Wahlaufgabe 2

Der Gemeindeverband „Grünes Tal" plant die Sanierung der Freibadanlage. Im Zuge des notwendig werdenden Umbaus des 50,00 m langen und 25,00 m breiten Beckens soll auch ein Sprungturm mit der Höhe 3,00 m neu entstehen. Der Absprungpunkt liegt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems mit der Längeneinheit 1 m (siehe Abbildung).

Aus Sicherheitsgründen muss der Beckengrund im Sprungbereich auf 4,00 m Tiefe abgesenkt werden. Im Querschnitt des Beckens wird der ursprüngliche Verlauf des Beckengrundes mittels einer Geraden durch die Punkte A und C beschrieben.

Für die Koordinaten x und y der Punkte der Sprungbahn gilt die Gleichung:

$$y = (\tan\alpha)\cdot x - \frac{g}{2{v_0}^2\cdot(\cos\alpha)^2}\cdot x^2.$$

Die Variablen haben folgende Bedeutung:

α: Absprungwinkel;

v_0: Absprunggeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$;

g: Fallbeschleunigung in $\frac{m}{s^2}$.

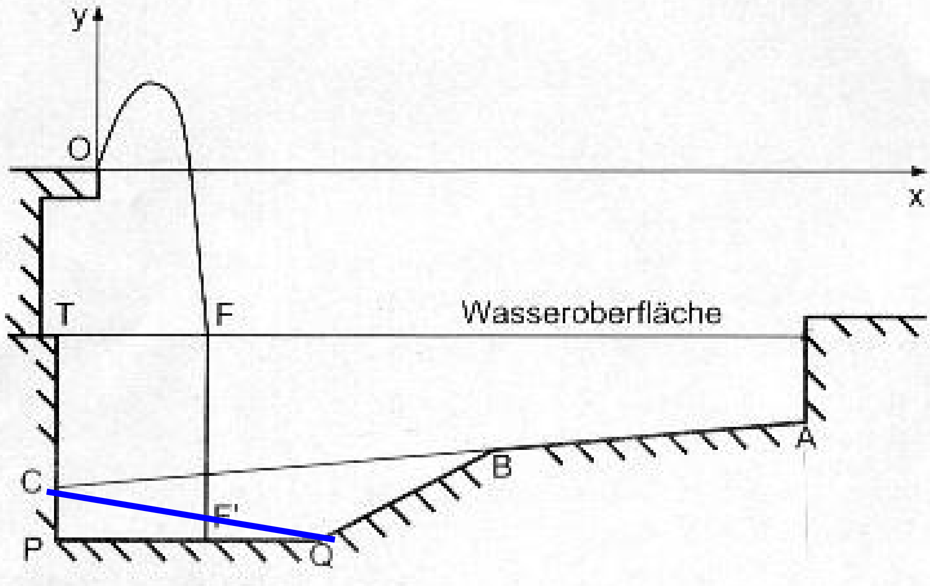


Abbildung (nicht maßstäblich)

Die Punkte haben folgende Koordinaten:

$O(0;0)$, $A(49{,}00;-4{,}20)$, $B(24{,}00;-4{,}80)$, $P(-1{,}00;-7{,}00)$, $T(-1{,}00;-3{,}00)$,
$C(-1{,}00;y_C)$, $Q(x_Q;-7{,}00)$, $F(x_F;-3{,}00)$, $F'(x_F;-7{,}00)$

F ist der Eintauchpunkt des Springers in das Wasser, F' der dazugehörige Lotfußpunkt auf dem Beckengrund.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung für die Punkte der Sprungbahn für $\alpha = 45°$; $v_0 = 5{,}0$ und $g = 9{,}81$ in die Gleichung $y = x - 0{,}3924x^2$ übergeht.

Der Punkt Q bezeichnet das Ende des Sprungbereiches.

Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes Q, so dass $\overline{PF'} = \overline{F'Q}$ gilt.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Werte einsetzen: tan 45 ° = 1 ; cos 45° = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $v_0 = 5$; g = 9,81

$$y = \tan 45° \cdot x - \frac{9{,}81}{2 \cdot 5^2.(\cos 45°)^2} \cdot x^2$$

$y = x - 0{,}3924x^2$ w.z.z.w.

Ermittlung der Koordinaten von F`(x_F/-7) und Q (x_Q/-7) : $-3 = x - 0{,}3957x^2$

$0 = x - 0{,}3957x^2 + 3$

(GTR/GRAPH/ROOT)

$x_1 = -1{,}77$ (entfällt)

$x_2 = 4{,}32$

→ F`(4,32/-7)

→ <u>Q (9,64/-7)</u>

b) Das Becken wird so erweitert, dass der Punkt Q die Koordinaten $Q(9{,}64; -7{,}00)$ besitzt. Dadurch erhöhen sich die Wasserkosten.

Ermitteln Sie die durch den Umbau des Beckens zusätzlich benötigte Wassermenge in Kubikmeter sowie den prozentualen Mehrbedarf an Wasser gegenüber dem Ausgangszustand.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Lösungsgedanke: (1) Wasserbecken ist ein Prisma mit der Grundfläche TPQBAA´ A`(49/-3)

(2) Berechnung der Grundfläche durch eine Flächenzerlegung von „innen" : $A_G = A_{TCAA´} + A_{CPQ} + A_{CQB}$

(3) $V = 25\, A_G$

(4) Prozentrechnung

zu (2): Ermittlung der Koordinaten von C ∈ g (AB): $y = 0{,}024x - 5{,}376$

<u>C (-1/5,4)</u>

$$A_{TCAA`} = \frac{|TC| + |AA`|}{2} \cdot TA` = \frac{2{,}4 + 1{,}2}{2} \cdot 50 = \mathbf{\underline{90\ FE}}$$

A_{CQB}= 23,192 FE (GTR/PROG/UP-3Eck)

$$A_{CPQ} = \frac{1}{2} \cdot |CP| \cdot |PQ| = \frac{1}{2} \cdot 1{,}6 \cdot 10{,}64 = \mathbf{\underline{8{,}512\ FE}}$$

zu (3): Volumen des alten Beckens: V = 90*25= **<u>2250 VE</u>**

Volumen des neuen Ausbaus: V = (23,192+8,512)*25 = **<u>792,6 VE</u>**

Zu (4) : Prozentrechnung: $\frac{x}{792{,}6} = \frac{100}{2250}$ x = 35,2%

Es werden 792,6m³ mehr Wasser benötigt. Das entspricht einer Steigerung um 35,2%.